INTEGRALI ZADACI (III-DEO) PARCIJALNA INTEGRACIJA

Ako su u i v diferencijabilne funkcije od x , onda je :

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Ova metoda, parcijalna integracija, po pravilu je na početku proučavanja slabo razumljiva. Mi ćemo pokušati , koliko to dozvoljava pisana reč da vam je približimo i objasnimo .

Zadati integral mi upoređujemo sa $\int u dv$. "Nešto" (recimo Θ) izaberemo da je u , a "nešto" (recimo Δdx) izaberemo da je dv. Od onog što smo izabrali da je u tražimo izvod , a od onog što smo izabrali da je dv tražimo integral.

$$\begin{vmatrix} \Theta = u & \Delta dx = dv \\ \Theta' dx = du & \int \Delta dx = v \end{vmatrix}$$

Kad nađemo du i v to menjamo u formulu parcijalne integracije: $uv - \int v du$. Ideja parcijalne integracije je da novodobijeni integral $\int v du$ bude lakši od početnog $\int u dv$. Ako dobijemo da on nije lakši, znači da smo pogrešno izabrali u i dv.

Najčešći **primer** na kome profesori objašnjavaju parcijalnu integraciju je :

$\boxed{\text{primer 1.}}$ $\int x e^x dx = ?$

Ovaj integral upoređujemo sa $\int u dv$. Izabraćemo da je $x = u$ a $e^x dx = dv$.

$$\int x e^x dx = \begin{vmatrix} x = u & e^x dx = dv \\ dx = du & \int e^x dx = v \\ & e^x = v \end{vmatrix} = \text{ovo sad menjamo u} \quad u \cdot v - \int v du$$

$$= \underbrace{x \cdot e^x}_{u \cdot v} - \underbrace{\int e^x dx}_{\int v \cdot du} = xe^x - e^x + C = \boxed{e^x(x-1)+C}$$

A šta bi se desilo da smo birali pogrešno? Da vidimo:

$$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} e^x = u & xdx = dv \\ e^x dx = du & \int xdx = v \\ & \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \boxed{\int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx} \rightarrow \text{ovaj integral je teži od početnog!}$$

Da bi "pametno" birali ove integrale ćemo podeliti u 4. grupe.

1. ***GRUPA*** Ovde ćemo birati da je x ili izraz vezan sa x jednak u, a sve ostalo je dv

   Na primer : $\int x \cos x dx$, $\int (1-x) \sin x dx$, $\int xe^x dx$, $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$, $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$ itd.

2. *GRUPA* Ovde ne uzimamo x za u , **već funkciju pored x** , (odnosno izraza sa x). lnx = u, arcsinx = u, arctgx = u a sve ostalo je dv.

Na primer : $\int x \ln x dx$ $\int x \arcsin x dx$, $\int x^2 arctgx dx$, $\int x^3 \ln x dx$ itd.

3. ***GRUPA*** Ovde ćemo uzimati $dx=dv$, a unutrašnja funkcija je u, kao u 2. grupi

Na primer : $\int \ln x dx$, $\int \ln^2 x dx$, $\int arctgx dx$, $\int \arcsin x dx$ itd.

4. ***GRUPA*** To su kružni integrali, koji uvek imaju svog "para" preko koga se dati integral vraća na početak…

Na primer : $\int e^x \sin x dx$, $\int e^x \cos x dx$, $\int \sin(\ln x) dx$, $\int \cos(\ln x) dx$ itd.

Od svake grupe ćemo uraditi po nekoliko primera...

Jasno je da urađeni primer $\int xe^x dx$ pripada prvoj grupi.

$\boxed{\text{primer 2.}}$ $\int (1-x)\sin x dx = ?$

$$\int (1-x)\sin x dx = \left| \begin{array}{ll} 1-x=u & \text{sinxdx=dv} \\ -dx=du & \int \text{sinxdx} = v \\ & -\cos x = v \end{array} \right| = \underbrace{(1-x)(-\cos x)}_{u\cdot v} - \underbrace{\int (-\cos x)(-dx)}_{\int vdu} = \boxed{(x-1)\cos x - \sin x + C}$$

$\boxed{\text{primer 3.}}$ $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = ?$

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{ll} x=u & \frac{dx}{\cos^2 x} = dv \\ dx=du & \int \frac{dx}{\cos^2 x} = v \\ & tgx = v \end{array} \right| = x \cdot tgx - \int tgx dx =$$

izvući ćemo $\int tgx dx$ ' na stranu' , rešiti ga , pa ćemo se vratiti u parcijalnu integraciju...

$\boxed{\text{primer 2.}}$ $\int (1-x)\sin x dx = ?$

$$\int (1-x)\sin x dx = \left| \begin{matrix} 1-x=u & \text{sinxdx=dv} \\ -dx=du & \int \text{sinxdx} = v \\ & -\cos x = v \end{matrix} \right| = \underbrace{(1-x)(-\cos x)}_{u\cdot v} - \underbrace{\int (-\cos x)(-dx)}_{\int vdu} = \boxed{(x-1)\cos x - \sin x + C}$$

$\boxed{\text{primer 3.}}$ $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = ?$

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} x=u & \frac{dx}{\cos^2 x} = dv \\ dx=du & \int \frac{dx}{\cos^2 x} = v \\ & tgx = v \end{matrix} \right| = x \cdot tgx - \int tgxdx =$$

izvući ćemo $\int tgxdx$ ‘ na stranu’ , rešiti ga , pa ćemo se vratiti u parcijalnu integraciju...

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \\ \sin xdx = -dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$$

vratimo se u zadatak:

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = x \cdot tgx - \int tgxdx = x \cdot tgx - (-\ln|\cos x|) + C = \boxed{x \cdot tgx + \ln|\cos x| + C}$$

Da bi "pametno" birali ove integrale ćemo podeliti u 4. grupe.

1. ***GRUPA*** Ovde ćemo birati da je x ili izraz vezan sa x jednak u, a sve ostalo je dv

Na primer : $\int x\cos x dx$, $\int (1-x)\sin x dx$, $\int xe^x dx$, $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$, $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$ itd.

2. *GRUPA* Ovde ne uzimamo x za u , već funkciju pored x , (odnosno izraza sa x). lnx = u,

arcsinx = u, arctgx = u a sve ostalo je dv.

Na primer : $\int x\ln x dx$ $\int x\arcsin x dx$, $\int x^2 arctgx dx$, $\int x^3 \ln x dx$ itd.

3. ***GRUPA*** Ovde ćemo uzimati dx=dv, a unutrašnja funkcija je u, kao u 2. grupi

Na primer : $\int \ln x dx$, $\int \ln^2 x dx$, $\int arctgx dx$, $\int \arcsin x dx$ itd.

4. ***GRUPA*** To su kružni integrali, koji uvek imaju svog "para" preko koga se dati integral vraća na početak…

Na primer : $\int e^x \sin x dx$, $\int e^x \cos x dx$, $\int \sin(\ln x)dx$, $\int \cos(\ln x)dx$ itd.

Za domaći zadatak uraditi

Iz svih ponuđenih grupa po prvi primer
naravno po mogućnosti ko koliko može .
Bilo bi lepo da svako pokuša i uradi dokle razume a ja ću se potruditi da svakom pregledam i objasnim gde greši, ako greši, i kako dalje rešiti.

svoje odgovore posaljite na mejl

djolemladenovic@gmail.com

Srećan rad