За одељења I_1 и I_4 за период 23.3 – 27.3.

Напомена!: Приликом слања поруке обавезно као наслов поруке написати „Други домаћи задатак", и тако за сваки наредни и на папиру написати своје име и одељење

Домаћи: (радити након погледане лекције)

1. Упростити изразе:

а) $\dfrac{\sin 750^\circ \cdot \cos 390^\circ \cdot tg\, 1140^\circ}{ctg\, 405^\circ \cdot \sin 1860^\circ \cdot \cos 780^\circ}$

б) $\dfrac{\cos \frac{17\pi}{6} \cdot \sin \frac{7\pi}{3} \cdot tg\, \frac{17\pi}{4}}{ctg\, \frac{10\pi}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{4} \cdot \sin \frac{8\pi}{3}}$

2. Одредити вредности триг. функција:

а) $ctg\, \frac{5\pi}{3}$ б) $\cos 315^\circ$ в) $\sin 300^\circ$

3. Доказати идентитет $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha) - \cos\alpha} = \dfrac{1}{2} tg\,\alpha$

SVODJENJE NA I KVADRAT

Kao što smo videli do sada, trigonometrijske funkcije uglova **I kvadranta** izračunavaju se na isti način kao trigonometrijske funkcije oštrih uglova pravouglog trougla. Pokazaćemo da se preko formula, trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla mogu izraziti preko trigonometrijskih funkcija odgovarajućeg ugla **I kvadranta**. Taj postupak se zove ***svodjenje na I kvadrat.***

1) Iz II u I kvadrant

Važe formule za: $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ odnosno $\boxed{\sin\left(90^0+\alpha\right)=\cos\alpha}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ odnosno $\boxed{\cos\left(90^0+\alpha\right)=-\sin\alpha}$

$tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$ odnosno $\boxed{tg\left(90^0+\alpha\right)=-ctg\alpha}$

$ctg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$ odnosno $\boxed{ctg\left(90^0+\alpha\right)=-tg\alpha}$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$

$ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha$

odnosno :

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha\\&\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha\\&tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha\\&ctg(180^0-\alpha)=-ctg\alpha\end{aligned}}$$

Primeri:

a) $\sin 115^o=\sin(90^o+25^o)=\cos 25^o$ a može i:

$\sin 115^o=\sin(180^o-65^o)=\sin 65^o$

Naravno, već smo videli "veze'' u **I kvadrantu** i znamo da je $\cos 25^o=\sin 65^o$. Tako da možete upotrebiti bilo koju formulu iz ove dve grupe.

b) $\cos\dfrac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

v) $tg141^o=tg\left(180^o-39^o\right)=-tg39^o$

g) $ctg101^o=ctg\left(90^o+11^o\right)=-tg11^o$

2) iz III u I kvadrant

Opet imamo **dve** grupe formula:

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$
$ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha$
to jest:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha\\ tg(180^0+\alpha)=tg\alpha\\ ctg(180^0+\alpha)=ctg\alpha\end{array}}$$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$ tj. $\boxed{\sin\left(270^0-\alpha\right)=-\cos\alpha}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$ tj. $\boxed{\cos\left(270^0-\alpha\right)=-\sin\alpha}$

$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$ tj. $\boxed{tg\left(270^0-\alpha\right)=ctg\alpha}$

$ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$ tj $\boxed{ctg\left(270^0-\alpha\right)=tg\alpha}$

Primeri:

a) $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 207^o=\cos\left(180^o+27^o\right)=-\cos 27^o$

v) $tg263^o=tg\left(270^o-7^o\right)=ctg7^o$

g) $ctg\frac{7\pi}{6}=ctg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

3) <u>Iz IV u I kvadrant</u>

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ tj. $\sin\left(270^0+\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$ tj. $\cos\left(270^0+\alpha\right)=\sin\alpha$

$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$ tj. $tg\left(270^0+\alpha\right)=-ctg\alpha$

$ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$ tj. $ctg\left(270^0+\alpha\right)=-tg\alpha$

Ako posmatramo negativan ugao $(-\alpha)$:
sin(-α) = - sinα cos(-α) = cosα tg(-α) = tgα ctg(-α) = -ctg α
Ovo nam govori da je jedino $\cos\alpha$ parna funkcija (jer "uništava'' minus a sve ostale su neparne)

Primeri:

a) $\sin 307^o=\sin\left(270^o+37^o\right)=-\cos 37^o$

b) $\cos(-30^o) = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

v) $tg\frac{11\pi}{6} = tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $ctg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -ctg\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Što se tiče periodičnosti funkcija $\sin x$ i $\cos x$ već smo uočili da važi:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \text{odnosno} \quad \sin(\alpha + 360^0 \cdot k) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \text{odnosno} \quad \cos(\alpha + 360^0 \cdot k) = \cos\alpha$$

za ***k*** koji je **bilo koji ceo broj**.

Dakle: **osnovni period finkcija** $\sin x$ **i** $\cos x$ **je** $T = 2\pi$ **odnosno** $T = 360^o$

<u>Primeri:</u>

a) $\sin 1170^o =$ (oduzmimo od 1170^o po 360^o dok se ne dodje '"ispod'' 360^o)

$$1170^o - 360^o = 810^o$$
$$810 - 360^o = 450^o$$
$$450^o - 360 = 90^o$$

Pa je: $\sin 1170^o = \sin 90^o = 1$ ili možemo zapisati: $\sin 1170^o = \sin(90^o + 3 \cdot 2\pi) = \sin 90^o$

b) $\cos 780^o =$ (sličan postupak)

$$780^o - 360^o = 420^o$$
$$420^o - 360^o = 60^o$$

Pa je $\cos 780^o = \cos 60^o = \frac{1}{2}$ tj. $\cos 780^o = \cos(60^o + 360^o) = \cos 60^o = \frac{1}{2}$

Za tangense i kotangense važi:

$tg(\alpha+k\pi)=tg\alpha$ odnosno $tg(\alpha+k\cdot180^0)=tg\alpha$

$ctg(\alpha+k\pi)=ctg\alpha$ odnosno $ctg(\alpha+k\cdot180^0)=ctg\alpha$

Dakle: **osnovni period funkcija** tgx **i** $ctgx$ **je** $T=\pi$ **odnosno** $T=180^o$

Primeri:

a) $tg750^o=$(odavde od 750^o oduzmemo po 180^o dok se ne " spustimo'' ispod 180^o)

$750^o-180^o=570^o$

$570^o-180^o=390$

$390^o-180^o=210^o$

$210^o-180^o=30^o$

$tg750^o=tg30^o=\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $ctg\left(-1110^o\right)=-ctg1110^o=-ctg30^o=-\sqrt{3}$ jer je $1110^o=6\cdot180^o+30^o$

ZADACI:

1) Uprostiti izraz: $\frac{\sin750^o\cdot\cos390^o\cdot tg1140^o}{ctg405^o\cdot\sin1860^o\cdot\cos780^o}$

Rešenja: Najpre ćemo upotrebom formula sve prebaciti u **I kvadrant**!

$$\sin750^o=\sin(30^o+2\cdot360^o)=\sin30^o=\frac{1}{2}$$

$$\cos390^o=\cos(30^o+360^o)=\cos30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg1140^o=tg(60^o+6\cdot180^o)=tg60^o=\sqrt{3}$$

$$ctg405^o=ctg(45^o+2\cdot180^o)=ctg45^o=1$$

$$\sin1860^o=\sin(60^o+5\cdot360^o)=\sin60^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos780^o=\cos(60^o+2\cdot360^o)=\cos60^o=\frac{1}{2}$$

Vratimo ova rešenja u početni zadatak:

$$\frac{\sin750^o\cdot\cos390^o\cdot tg1140^o}{ctg405^o\cdot\sin1860^o\cdot\cos780^o}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\sqrt{3}}{1\cdot\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}=\sqrt{3}$$

2) Uprosti izraz:

$$\frac{\cos\frac{17\pi}{6}\cdot\sin\frac{7\pi}{3}\cdot tg\frac{17\pi}{4}}{ctg\frac{10\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{8\pi}{3}}$$

Slično kao u prethodnom zadatku, sve prebacujemo u **I kvadrant.**

$$\cos\frac{17\pi}{6}=\cos\frac{17\cdot180^o}{6}=\cos510^o=\cos150^o=\cos(180^o-30^o)=-\cos30^o=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\sin60^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tg\frac{17\pi}{4}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{16\pi}{4}\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)=tg\frac{\pi}{4}=tg45^o=1$$

$$ctg\frac{10\pi}{3}=ctg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{9\pi}{3}\right)=ctg\left(\frac{\pi}{3}+3\pi\right)=ctg\frac{\pi}{3}=ctg60^o=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{7\cdot180^o}{4}=\cos315^o=\cos(-45^o)=\cos45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{8\pi}{3}=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\frac{2\cdot180^o}{3}=\sin120^o=\sin(90^o+30^o)=$$
$$=\cos30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zamenimo ove vrednosti u zadatak:

$$\frac{\cos\frac{17\pi}{6}\cdot\sin\frac{7\pi}{3}\cdot tg\frac{17\pi}{4}}{ctg\frac{10\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{8\pi}{3}}=\frac{-\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot1}{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3) Dokazati indetitet:

$$\frac{\sin\alpha-2\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)-\cos\alpha}=\frac{1}{2}tg\alpha$$

Kod indetiteta krenimo od jedne strane i transformišemo je, dok ne dodjemo do druge strane.

Važi:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha-2\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-2\sin\alpha}{-\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{-2\cos\alpha}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}tg\alpha$$

4) Dokazati indetitet:

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)tg(\pi-\alpha)}=-\sin\alpha$$

Važi:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$$

Pa je:

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)tg(\pi-\alpha)}=\frac{(-\sin\alpha)\cancel{(-tg\alpha)}\ \cancel{(\cos\alpha)}}{\cancel{(\cos\alpha)}\ \cancel{(-tg\alpha)}}=-\sin\alpha$$