

1. Дато је  $a_1 = 2$  и  $a_5 = 23$ . Нaђи  $a_{15}$ .
  2. У аритметичком низу је  $a_2 + a_5 - a_3 = 10$ ,  $a_1 + a_6 = 17$ . Одредити  $a_1$  и  $d$ .
  3. Општи члан низа дат је формулом  $a_n = 5 + 8n$ . Нaђи збир првих 100 чланова.
- 
4. Нaђи аритметички низ код кога је  $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ , и  $a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80$ .
  5. Нaђи растући аритметички низ у коме је збир прва три члана 27, а збир њихових квадрата 275.
  6. Између 3 и 17 уметнуто је 6 бројева који са датим образују аритметички низ. Који су то бројеви?
- 
7. Бројеви  $x^2 + 2x - 4$ ,  $x^2 + 5x - 7$  и  $5x+8$  су три узастопна члана једног аритметичког низа. Одредити  $x$ .
  8. Нaђи  $S_{10}$  ако је  $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$ .
  9. Бројеви  $a$ ,  $b$  и  $c$  су узастопни члани једног аритметичког низа. Доказати да су и бројеви  $a^2 + ab + b^2$ ,  $a^2 + ac + c^2$  и  $b^2 + bc + c^2$  узастопни члани једног аритметичког низа.

## Арифметични низ

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$\begin{matrix} d=3 & 3 & 3 & 3 \\ 5, & 8, & 11, & 14, & 17, \dots \\ & | & | & | & | \end{matrix}$$

d - разлика

$a_1, a_2, a_3, \dots$  членови  
низа

$$\textcircled{*} \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad - n\text{-ти член}$$

$$\textcircled{*} \quad S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

збир првих  $n$ -членова

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}} \quad \textcircled{*}$$

$$\text{нр. } 8 = \frac{11+5}{2} = \frac{16}{2}$$

$$14 = \frac{11+17}{2} = \frac{28}{2}$$

$$1. a_1 = 2, \quad a_{15} = ?$$

$$a_8 = 23 \quad a_8 = a_1 + 7d$$

$$23 = 2 + 7d$$

$$23 - 2 = 7d$$

$$21 = 7d \Rightarrow d = 3$$

$$a_{15} = a_1 + 14d$$

$$a_{15} = 2 + 14 \cdot 3$$

$$a_{15} = 2 + 42 = 44$$

$$2. \begin{array}{l} a_2 + a_5 - a_3 = 10 \\ a_1 + a_6 = 17 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

$$\underline{a_1 + a_1 + 4d - (a_1 + 2d) = 10}$$

$$a_1 + a_1 + 5d = 17$$

$$\underline{2a_1 + 5d - a_1 - 2d = 10}$$

$$2a_1 + 5d = 17$$

$$a_1 + 3d = 10 \quad |(-2)$$

$$2a_1 + 5d = 17$$

$$\underline{-2a_1 - 6d = -20}$$

$$\textcircled{+} \quad \underline{2a_1 + 5d = 17}$$

$$-d = -3$$

$$\boxed{d = 3}$$

$$2 \cdot a_1 + 5 \cdot 3 = 17$$

$$2a_1 + 15 = 17$$

$$2a_1 = 2$$

$$\boxed{a_1 = 1}$$

$$3. a_n = 5 + 8n$$

$$a_1 = 5 + 8 \cdot 1 = 13$$

$$a_2 = 5 + 16 = 21$$

$$a_2 - a_1 = 21 - 13 = 8 = d$$

$$S_{100} = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

$$S_{100} = \frac{100}{2} [2a_1 + 99d]$$

$$S_{100} = 50 [2 \cdot a_1 + 99d]$$

$$S_{100} = 50 [2 \cdot 13 + 99 \cdot 8] = 50 \cdot [26 + 792] = 50 \cdot 818 = 40900$$

$$\frac{292}{26} = \frac{792}{818}$$

$$4. a_1 + a_3 + a_5 = -12$$

$$a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80$$

$$\underline{a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d = -12}$$

$$3a_1 + 6d = -12 \quad | :3$$

$$a_1 + 2d = -4$$

$$\boxed{a_1 = -2d - 4}$$

$$a_1 = -2 \cdot 3 - 4 = -10$$

$$\boxed{[-10, -7, -4, -1, \dots]}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80 \\ a_1 \cdot (a_1 + 2d) \cdot (a_1 + 4d) = 80 \\ (-2d - 4)(-2d - 4 + 2d)(-2d - 4 + 4d) = 80 \\ -2(d+2)(-4)(2d-4) = 80 \\ 8(d+2) \cdot 2(d-2) = 80 \\ 16(d^2 - 4) = 80 \\ d^2 - 4 = \frac{80}{16} \\ d^2 - 4 = 5 \\ d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3 \end{cases}$$

$$a_1 = -2 \cdot (-3) - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\boxed{2, -1, -4, -2, \dots}$$

$$5. \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 27 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 275 \end{aligned}$$

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27$$

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = 275$$

$$3a_1 + 3d = 27 \quad | :3$$

$$\boxed{a_1 + d = 9} \Rightarrow d = 9 - a_1$$

$$a_1^2 + (a_1 + 9 - a_1)^2 + (a_1 + 2(9 - a_1))^2 = 275$$

$$a_1^2 + 81 + (18 - a_1)^2 = 275$$

$$a_1^2 + 81 + 324 - 36a_1 + a_1^2 = 275$$

$$2a_1^2 - 36a_1 + 405 - 275 = 0$$

$$2a_1^2 - 36a_1 + 130 = 0 \quad | :2$$

$$a_1^2 - 18a_1 + 65 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 260}}{2} = \frac{18 \pm 8}{2} = \begin{cases} 13 \\ 5 \end{cases}$$

$$a_1 + d = 9$$

~~$$\begin{cases} d = 9 - 13 \\ d = -4 \end{cases}$$~~

$$\begin{aligned} a_1 + 5 &= 9 \\ a_1 &= 9 - 5 \\ a_1 &= 4 \end{aligned}$$

$\boxed{4, 9, 13, 17 \dots}$

⑥ 3 17 6 dpoje 6's

$$a_1 = 3, a_8 = 17$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{a_8 - a_1}{8-1} = \frac{17-3}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$$

⑦  $x^2 + 2x - 4, x^2 + 5x - 7, 5x + 8$

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} \quad \left[ a_u = \frac{a_{u-1} + a_{u+1}}{2} \right]$$

$$x^2 + 5x - 7 = \frac{x^2 + 2x - 4 + 5x + 8}{2} = \frac{x^2 + 7x + 4}{2}$$

$$2x^2 + 10x - 14 = x^2 + 7x + 4$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1(-18)}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2} \rightarrow x_1 = 3 \\ \rightarrow x_2 = -6$$

8.  $S_{19} = ?$

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$$

$$a_1 + 3d + a_1 + 7d + a_1 + 11d + a_1 + 15d = 224 \quad \begin{matrix} 21 \\ 75 \\ 36 \end{matrix}$$

$$4a_1 + 36d = 224 \quad | :4$$

$$\boxed{a_1 + 9d = 56}$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} [2a_1 + (19-1)d]$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} [2a_1 + 18d]$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} [2(a_1 + 9d)]$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} \cdot 2 \cdot 56 = \boxed{1064}$$