За одељења III_3 и III_4 за период 13.4.–16.4.

Домаћи

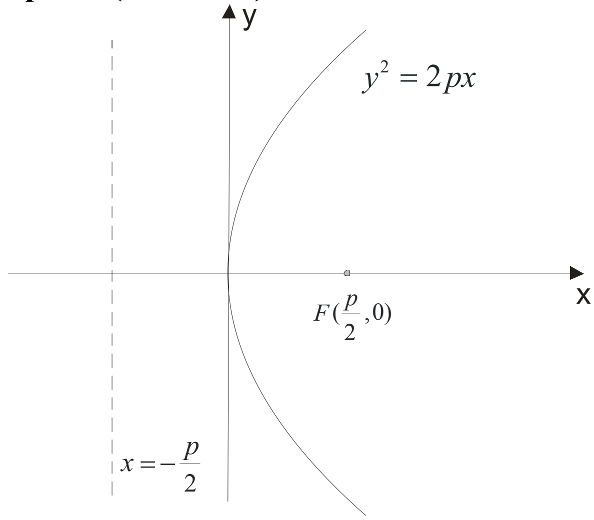
1. Дата је парабола $y^2=4x$ и тачка $M\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$. Одредити дужину тетиве параболе, која је том тачком преполовљена.

2. Одредити једначину тангенте параболе $y^2=12x$, која са правом $y=3x-4$ гради угао $\alpha=45°$.

Обавештење!: У недељи после Васкрса биће одржан писмени задатак, у среду 22.4. Детаљније информације окачићу на Teams у наредна два дана

PARABOLA

Parabola je skup tačaka u ravni sa osobinom da je rastojanje svake tačke od jedne stalne tačke (žiže) jednako odstojanju te tačke od jedne stalne prave (direktrise).



$F(\frac{p}{2},0)$ je žiža parabole.

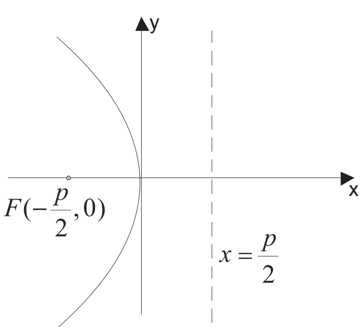
Prava $x=-\frac{p}{2}$ je direktrisa parabole ili $x+\frac{p}{2}=0$.

Odstojanje tačke F od direktrise obeležava se sa ***p*** i naziva se parametar parabole.

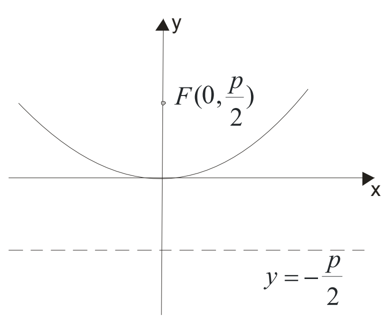
Koordinatni početak je teme parabole.

Jednačina parabole je $\boxed{y^2 = 2px}$

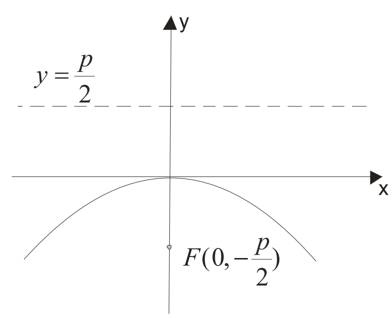
Naravno, ova parabola se najviše proučava , a da vas ne iznenadi evo i ostalih parabola:



$y^2 = -2px$



$x^2 = 2py$



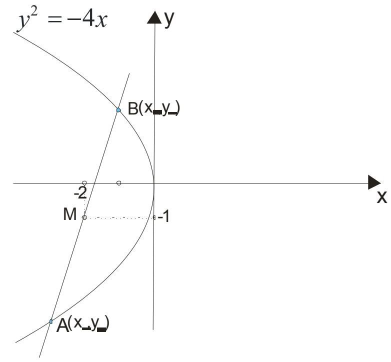
$x^2 = -2py$

Primer 1.

Data je parabola $y^2 = -4x$ *. Kroz njenu tačku M(-2,-1) postaviti tetivu koja je tom tačkom prepolovljena.*

Rešenje:

Postavimo najpre problem, skicirajući ga...



Neka je AB tražena tetiva. Tačka M je sredina duži AB pa mora da važi:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \to x_1 + x_2 = -4$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -1 \to y_1 + y_2 = -2$$

Tačke A i B pripadaju paraboli , pa njihove koordinate možemo menjati umesto x i y u jednačini parabole:

$$A(x_1, y_1) \in y^2 = -4x \to {y_1}^2 = -4x_1$$

$$B(x_2, y_2) \in y^2 = -4x \to {y_2}^2 = -4x_2$$

Na ovaj način smo dobili 4 jednačine sa 4 nepoznate. Možemo tražiti koordinate tačaka A i B ali je pametnije samo naći koeficijent pravca prave koja prolazi kroz AB i onda upotrbiti jednačinu prave kroz jednu tačku. $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

${y_1}^2 = -4x_1$

$\underline{{y_2}^2 = -4x_2}$ oduzmemo od druge prvu jednačinu

${y_2}^2 - {y_1}^2 = -4x_2 - (-4x_1)$

$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = -4x_2 + 4x_1$ znamo da je $y_2 + y_1 = -2$

$(y_2 - y_1)(-2) = -4(x_2 - x_1)$

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2$

Sada jednačina prave kroz jednu tačku *M(-2,-1)*

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - (-1) = 2(x - (-2))$

$y + 1 = 2x + 4$

$y = 2x + 3$

Evo jednačine tražene tetive!

Prava i parabola

Slično kao kod kružnice , elipse i hiperbole da bi odredili međusobni položaj prave i parabole, rešavamo sistem jednačina: $y = kx + n$ i $y^2 = 2px$

- Ako sistem nema rešenja , onda se prava i parabola ne seku, to jest $p < 2kn$
- Ako sistem ima dva rešenja, onda prava seče parabolu u dvema tačkama $p > 2kn$
- Ako sistem ima jedno rešenje, prava je tangenta parabole i zadovoljava USLOV DODIRA: $p = 2kn$

Napomena

Ako nam traže tangentu pararbole u datoj tački (x_0, y_0) na pararboli , onda imamo gotovu formulu:

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0)$$

Primer 2.

U kojoj tački parabole $y^2 = 16x$ *je tangenta nagnuta pod uglom od* 135^0 *prema x-osi.*

Rešenje:

Obeležimo tu tačku sa (x_0, y_0). Tangenta će biti $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$, odnosno ,iz jednačine parabole je 2p = 16

p = 8

$$y \cdot y_0 = 8(x + x_0)$$
$$y \cdot y_0 = 8x + 8x_0$$
$$y = \frac{8}{y_0}x + \frac{8x_0}{y_0}$$
$$k = \frac{8}{y_0}$$

Našli smo koeficijent pravca te prave , a kako je

$$k = tg\alpha$$
$$k = tg135^0$$
$$k = -1$$

Onda je

$$k = \frac{8}{y_0}$$
$$-1 = \frac{8}{y_0} \rightarrow y_0 = -8$$

Ovu vrednost zamenimo u jednačinu parabole i imamo:

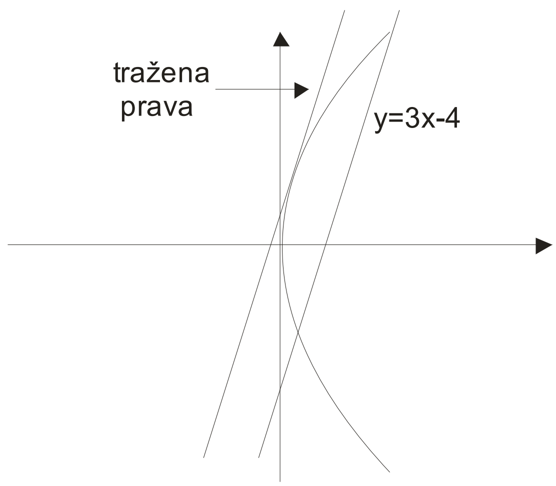
$$y^2 = 16x$$
$$(-8)^2 = 16x$$
$$16x = 64$$
$$x = 4$$

Dakle, tražena tačka na paraboli je (4, -8)

Primer 3.

Napisati jednačinu tangente parabole $y^2 = 12x$ *ako je poznato da je paralelna sa pravom* $3x - y - 4 = 0$

Rešenje:



Kako je naša prava paralelna sa datom , one imaju isto k (uslov paralelnosti)

$$3x - y - 4 = 0$$
$$y = 3x - 4$$
$$k = 3$$

Naša tražena prava je dakle $y = 3x + n$, a n ćemo naći pomoću uslova dodira

Iz parabole je $y^2 = 12x \rightarrow 2p = 12 \rightarrow p = 6$

$$p = 2kn$$
$$6 = 2 \cdot 3n$$
$$6 = 6n$$
$$n = 1$$

Rešenje je $y = 3x + 1$

Primer 4.

Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih $y^2 = 4x$ *i* $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$

Rešenje:

Da najpre sredimo kružnicu

$$x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$$
$$x^2 - 2x + y^2 - 9 = 0$$
$$\underline{x^2 - 2x + 1} - 1 + y^2 - 9 = 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 10 \rightarrow p = 1, q = 0, r^2 = 10$$

Neka je tražena tangenta $y = kx + n$.

Ona mora da zadovoljava i uslov dodira sa parabolom i sa kružnicom .

Iz jednačine parabole $y^2 = 4x$ je 2p = 4 , pa je **p = 2**

Ovo zamenimo u uslov dodira

$$p = 2kn$$
$$2 = 2kn$$
$$\boxed{kn = 1}$$

Sada uslov dodira za kružnicu:

$$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$$
$$10(k^2 + 1) = (1 \cdot k + n)^2$$
$$\boxed{10(k^2 + 1) = (k + n)^2}$$

Dobili smo dve jednačine sa po dve nepoznate,pa rešavamo sistem

$$\boxed{10(k^2 + 1) = (k + n)^2}$$
$$\boxed{kn = 1}$$
$$n = \frac{1}{k}$$
$$10(k^2 + 1) = (k + \frac{1}{k})^2$$
$$10(k^2 + 1) = (\frac{k^2 + 1}{k})^2$$
$$10(k^2 + 1) = \frac{(k^2 + 1)^2}{k^2}$$
$$10k^2 = k^2 + 1$$
$$9k^2 = 1$$
$$k^2 = \frac{1}{9} \rightarrow k_1 = \frac{1}{3}, k_2 = -\frac{1}{3}$$

Vratimo se da nađemo n

$kn = 1$

$k_1 = \frac{1}{3} \to n_1 = 3$

$k_2 = -\frac{1}{3} \to n_2 = -3$

Jednačine tangenti su

$t_1: \quad y = \frac{1}{3}x + 3$

$t_2: \quad y = -\frac{1}{3}x - 3$

Zašto nam se javljaju dva rešenja?

Pa ako skiciramo problem, vidimo da je to očigledno...