

## NIZOVI

Bilo koje preslikavanje skupa svih prirodnih brojeva  $N$  u neki neprazan skup  $S$  naziva se *niz*.

Niz je dakle preslikavanje kojim se :

prirodnom broju 1 dodeljuje njegova slika  $a_1 \in S$

prirodnom broju 2 dodeljuje njegova slika  $a_2 \in S$

prirodnom broju 3 dodeljuje njegova slika  $a_3 \in S$

.....

prirodnom broju  $n$  dodeljuje njegova slika  $a_n \in S$

.....itd.

Mi najčešće niz predstavljamo kao slike:  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) = (a_n)$  (kraći zapis)

Za element  $a_n$  kažemo da je opšti član niza ( a taj je nama i najznačajniji jer se često niz zadaje samo preko svog opšteg člana)

### PRIMER 1.

Napisati prvih 5 članova niza zadatih svojim opštim članom:

a)  $a_n = 3 + (-1)^n$

b)  $b_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$

### Rešenje:

a)

$$a_n = 3 + (-1)^n$$

Prvi član niza nalazimo za  $n=1$ , pa je  $a_1 = 3 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2$

Drugi član niza nalazimo za  $n=2$ , pa je  $a_2 = 3 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4$

Treći član niza nalazimo za  $n=3$ , pa je  $a_3 = 3 + (-1)^3 = 3 - 1 = 2$

Četvrti član će biti za  $n=4$ , to jest  $a_4 = 3 + (-1)^4 = 3 + 1 = 4$

Peti član , za  $n=5$ , je  $a_5 = 3 + (-1)^5 = 3 - 1 = 2$

b)

$$b_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

Prvi član niza nalazimo za  $n=1$ , pa je  $b_1 = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$

Drugi član niza nalazimo za  $n=2$ , pa je  $b_2 = \frac{\sin \frac{2\pi}{2}}{2^2} = \frac{\sin \pi}{4} = \frac{0}{4} = 0$

Treći član niza nalazimo za  $n=3$ , pa je  $b_3 = \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3^2} = \frac{-1}{9} = -\frac{1}{9}$

Četvrti član će biti za  $n=4$ , to jest  $b_4 = \frac{\sin \frac{4\pi}{2}}{4^2} = \frac{\sin 2\pi}{16} = \frac{0}{16} = 0$

Peti član, za  $n=5$ , je  $b_5 = \frac{\sin \frac{5\pi}{2}}{5^2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{25} = \frac{1}{25}$

## PRIMER 2.

Odrediti opšti član niza:

a)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

b)  $0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \dots$

c)  $1, 3, 7, 15, 31, \dots$

**Rešenje:**

a)

E ovo je već malo zeznutija situacija....

Mora malo da se razmišlja!

Naš niz glasi  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Primećujemo da se broj u brojiocu poklapa sa članom niza o kome se radi:

$$a_1 = \frac{\boxed{1}}{2}, a_2 = \frac{\boxed{2}}{3}, a_3 = \frac{\boxed{3}}{4}, a_4 = \frac{\boxed{4}}{5}, \dots \text{ Dakle taj gornji broj je } n.$$

Dalje primećujemo da je broj u imeniocu za 1 veći od broja u brojiocu, pa ćemo njega obeležiti sa  $n+1$

Sad možemo zaključiti da je opšti član niza 
$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

b)

Niz glasi  $0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \dots$

Primećujemo da su članovi na neparnim mestima 0, dakle  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$

Problem je dakle opisati članove na parnim mestima!

$$a_2 = \frac{1}{3},$$

$$a_4 = \frac{1}{4},$$

$$a_6 = \frac{1}{5},$$

.....

Brojilac nije problem, tu je sigurno 1.

Razmišljamo šta je sa imeniocem:

Za  $n=2$ , dole je 3, a ideja je  $3 = \frac{2}{2} + 2 \rightarrow \frac{n}{2} + 2$

Za  $n=4$ , dole je 4, a  $4 = \frac{4}{2} + 2 \rightarrow \frac{n}{2} + 2$

Za  $n=6$ , dole je 5, itd. a  $5 = \frac{6}{2} + 2 \rightarrow \frac{n}{2} + 2$

Zaključujemo da članove na parnim mestima možemo zapisati kao 
$$a_n = \frac{1}{\frac{n}{2} + 2}$$

E sad za ceo niz će biti  $a_n = \begin{cases} 0, & \text{za } n = 2k - 1 \\ \frac{1}{\frac{n}{2} + 2}, & \text{za } n = 2k \end{cases}$

c)

1,3,7,15,31.....

Da bi opisali ovaj niz, poči ćemo od poznatijeg: 1,4,8,16,32,....to jest  $1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$

Ovo je ustvari niz  $2^n$ , a kako su naši članovi za po 1 ( počevši od drugog) manji od odgovarajućih članova ovog niza, zaključujemo da je opšti član našeg niza  $a_n = 2^n - 1$

### PRIMER 3.

Niz je dat rekurentnom formulom, odrediti opšti član niza.

a)  $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$  i  $a_0 = 2, a_1 = 3$

b)  $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$  i  $a_0 = 1, a_1 = 3$

### Rešenje:

U ovakvoj situaciji, kad je niz dat rekurentnom formulom, najpre „pridružimo“ kvadratnu jednačinu

$$a_{n+1} \rightarrow r^2$$

gde je  $a_n \rightarrow r$  i nadujemo rešenje te kvadratne jednačine .

$$a_{n-1} \rightarrow 1$$

Ako su rešenja različita  $r_1 \neq r_2$  tada je opšti član oblika  $a_n = C \cdot (r_1)^n + D \cdot (r_2)^n$

Ako su rešenja ista  $r_1 = r_2$ , onda je opšti član oblika  $a_n = C \cdot (r_1)^n + D \cdot n \cdot (r_1)^n$

Naravno, C i D su konstante koje tražimo za zadate vrednosti  $a_0$  i  $a_1$

Da vidimo to konkretno na našem primeru....

a)

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \text{ i } a_0 = 2, a_1 = 3$$

Iz  $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$  dobijamo  $r^2 = 3r - 2$  pa rešimo ovu kvadratnu jednačinu:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1$$

Sad znamo da je opšte rešenje oblika:

$$a_n = C \cdot (r_1)^n + D \cdot (r_2)^n$$

$$a_n = C \cdot (2)^n + D \cdot (1)^n$$

$$a_n = C \cdot 2^n + D \cdot 1$$

Dalje tražimo vrednosti za konstante C i D:

$$a_n = C \cdot 2^n + D$$

$$a_0 = 2 \rightarrow C \cdot 2^0 + D = 2 \rightarrow \boxed{C+D=2}$$

$$a_1 = 3 \rightarrow C \cdot 2^1 + D = 3 \rightarrow \boxed{2C+D=3}$$

Rešimo ovaj sistem jednačina I dobijamo  $C=1$  i  $D=1$  pa je  $a_n = C \cdot 2^n + D \rightarrow \boxed{a_n = 2^n + 1}$  rešenje!

b)

$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} \text{ i } a_0 = 1, a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} \text{ pridružimo kvadratnu jednačinu } r^2 = 4r - 4 \text{ to jest } r^2 - 4r + 4 = 0 \text{ gde je } r_1 = r_2 = 2$$

Sad imamo situaciju da je  $a_n = C \cdot (r_1)^n + D \cdot n \cdot (r_1)^n$  to jest  $a_n = C \cdot 2^n + D \cdot n \cdot 2^n = (C + D \cdot n) \cdot 2^n$

Dalje tražimo vrednosti za konstante C i D:

$$a_n = (C + D \cdot n) \cdot 2^n$$

$$a_0 = 1 \rightarrow (C + D \cdot 0) \cdot 2^0 = 1 \rightarrow C = 1$$

$$a_1 = 3 \rightarrow (C + D \cdot 1) \cdot 2^1 = 3 \rightarrow (1 + D) \cdot 2 = 3 \rightarrow 1 + D = \frac{3}{2} \rightarrow D = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot n\right) \cdot 2^n$$

ЗА ОДЕЛЈЕЊА  $\text{III}_3$  И  $\text{III}_4$  ЗА ПЕРИОД 4.5 - 8.5.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

1) НАПИСАТИ ПРВИХ ШЕСТ ЧЛАНОВА НИЗА  $(a_n)$   
ЧИЈИ ЈЕ ОПШТИ ЧЛАН:

$$\alpha) a_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}$$

$$\delta) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$$

2) Одредити општи члан низа:

$$\alpha) 1, 4, 10, 19, 31, \dots$$

$$\delta) 1, \frac{2}{1 \cdot 2}, \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots$$

3) ДАТ ЈЕ НИЗ РЕКУРЕНТНОМ ФОРМУЛОМ

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$  И  ~~$a_0 = 1$~~ ,  $a_0 = 0, a_1 = 1$ . Одреди  
општи члан низа.

Напомена!: У четвртак преподне биће окачен

контролни задатак за ученике који нису добили  
оцену на писменом задатку (на сајту школе за  
оне који немају приступ Teams-у а за остале на  
Teams-у). Рок за слање биће четвртак до 18h.

Напомена 21: Рок за спање домаћих 03, 04, 05

ЈЕ ИСТЕКАО ТАКО ДА МОЛИМ УЧЕНИКЕ ДА МИ НЕ  
ШАЉУ ТЕ ДОМАЋЕ.