

Aritmetički niz:

Podjimo od dva primera:

Primer 1: 3,5,7,9,11,...

Primer 2: 55,50,45,40,...

Nije teško zaključiti da će u prvom primeru nekoliko sledećih članova biti 13,15,17,... jer se svaki sledeći član povećava za dva. U drugom primeru će nekoliko sledećih članova biti 35,30,25,... jer se svaki sledeći smanjuje za 5. Kako vidimo, niz može biti rastući ili opadajući.

Ovakvi nizovi u kojima je razlika ma koja dva uzastopna člana konstantna nazivaju se **aritmetički nizovi** ili aritmetičke progresije.

Vrlo je važno od kog broja počinje niz, pa se on zove **prvi član niza** i obeležava se sa a_1 .

Za primer 3,5,7,9,11,... → prvi član niza je $a_1 = 3$

Za primer 55,50,45,40,... → prvi član niza $a_1 = 55$

Razlika (diferencija) niza je broj za koji se niz povećava (smanjuje) i obeležava se slovom d .

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

Za primer 3,5,7,9,11,... → $d = 2$ (raste niz)

Za primer 55,50,45,40,... → $d = -5$ (opada niz)

Nekad će nam biti potrebno da nadjemo stoti, hiljaditi ili bilo koji drugi član niza. Slažete se da je naporno pisati ih redom. **Tu nam pomaže formula za n-ti član niza:**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ako trebamo sabrati prvih n -članova niza, tu važi formula:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad \text{ili} \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Za svaki aritmetički niz još važi (**aritmetička sredina**) :

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{ili} \quad a_n = \frac{a_{n-j} + a_{n+j}}{2} \quad j = 2, \dots, n-1$$

Ako između brojeva a i b treba umetnuti (interpolirati) k -brojeva tako da zajedno sa a i b čine aritmetički niz, onda razliku d tog niza tražimo po formuli $d = \frac{b-a}{k+1}$

Zadaci:

1) *Peti član aritmetičkog niza je 19 a deseti član niza je 39. Odrediti niz.*

Rešenje:

$$a_5 = 19$$
$$a_{10} = 39$$

Aritmetički niz je potpuno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d . Da bi našli ove 2 nepoznate primenićemo formulu za n -ti član niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{za } n=5 \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = 19$$

$$\text{za } n=10 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 39$$

Sastavićemo sistem jednačina:

$$a_1 + 4d = 19 \quad \cdot (-1)$$

$$a_1 + 9d = 39$$

$$-a_1 - 4d = -19$$

$$+ a_1 + 9d = 39$$

$$5d = 20$$

$$d = 4 \rightarrow \text{vratimo se u jednu od jednačina}$$

$$a_1 + 4d = 19$$

$$a_1 + 16 = 19$$

$$a_1 = 3$$

Znači prvi član niza je 3 a povećava se za 4 pa je niz: 3, 7, 11, 15, 19, ...

Njegov opšti član će biti:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4$$

$$a_n = 4n - 1$$

2) Nadj prví član a_1 i diferenciju d aritmetičkom nizu ako je :

$$a_2 + a_5 - a_3 = 10 \quad \text{i} \quad a_2 + a_9 = 17$$

Rešenje: Ovakav tip zadatka rešavamo pomoću opšteg člana:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \rightarrow \begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4d \\ a_3 &= a_1 + 2d \\ a_9 &= a_1 + 8d \end{aligned} \end{aligned}$$

Zamenimo ovo u 2 date jednačine:

$$a_2 + a_5 - a_3 = 10$$

$$\underline{a_2 + a_9 = 17}$$

$$(a_1 + d) + (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 10$$

$$(a_1 + d) + (a_1 + 8d) = 17$$

$$\underline{a_1 + d + a_1 + 4d - a_1 - 2d = 10}$$

$$\underline{a_1 + d + a_1 + 8d = 17}$$

$$a_1 + 3d = 10 \rightarrow \text{pomnožimo sa } -2$$

$$2a_1 + 9d = 17$$

$$\underline{-2a_1 - 6d = -20}$$

$$\underline{2a_1 + 9d = 17}$$

$$3d = -3$$

$$d = -1$$

$$a_1 + 3d = 10$$

$$a_1 - 3 = 10$$

$$a_1 = 13$$

Znači niz je opadajući i glasi 13,12,11,10,9,8,7,...

3) Odrediti aritmetički niz ako je: $5a_1 + 10a_5 = 0$ i $S_4 = 14$

Rešenje:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$5a_1 + 10(a_1 + 4d) = 0$$

$$5a_1 + 10a_1 + 40d = 0$$

$$15a_1 + 40d = 0$$

$$\boxed{3a_1 + 8d = 0}$$

$$S_4 = 14$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_4 = \frac{4}{2}[2a_1 + (4-1)d]$$

$$14 = 2[2a_1 + 3d]$$

$$\boxed{2a_1 + 3d = 7}$$

Sad ove dve jednačine "upakujemo" :

$$3a_1 + 8d = 0 \cdot 2$$

$$2a_1 + 3d = 7 \cdot (-3)$$

$$6a_1 + 16d = 0$$

$$-6a_1 - 9d = -21$$

$$7d = -21$$

$$d = -3$$

$$3a_1 + 8d = 0 \Rightarrow 3a_1 - 24 = 0$$

$$3a_1 = 24$$

$$a_1 = 8$$

Znači niz je : 8,5,2,-1,-4,...

4) Izračunati n i a_n u aritmetičkoj progresiji za koje su:

$$a_1 = 2$$

$$d = 5$$

$$S_n = 245$$

Rešenje:

Znači ovde nam treba n ...

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$245 = \frac{n}{2}[2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 5]$$

$$245 = \frac{n}{2}[4 + 5n - 5]$$

$$490 = n[5n - 1]$$

$$490 = 5n^2 - n$$

$$5n^2 - n - 490 = 0$$

Dobili smo kvadratnu jednačinu "po n ".

$$a = 5, b = -1, c = -490$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 99}{10}$$

$$n_1 = 10, n_2 = \frac{98}{10}$$

Nemoguće

Znači : $n = 10$ je jedino rešenje

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{10} = 2 + (10-1) \cdot 5$$

$$a_{10} = 2 + 45$$

$$\boxed{a_{10} = 47}$$

5) Zbir prva tri člana aritmetičkog niza je 36, a zbir kvadrata prva tri člana je 482. Odrediti niz.

Rešenje:

Da postavimo problem:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 36$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 482$$

Iskoristićemo da je

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 36$$

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = 482$$

$3a_1 + 3d = 36$ Odavde ćemo izraziti a_1 i zameniti u drugu jednačinu sistema

$$a_1 + d = 12$$

$$\boxed{a_1 = 12 - d}$$

$$(12 - d)^2 + (12 - d + d)^2 + (12 - d + 2d)^2 = 482$$

$$(12 - d)^2 + 12^2 + (12 + d)^2 = 482$$

$$144 - 24d + d^2 + 144 + 144 + 24d + d^2 = 482$$

$$2d^2 + 432 = 482$$

$$2d^2 = 50$$

$$d^2 = 25$$

$$d = \pm\sqrt{25} \rightarrow d = \pm 5$$

$$\underline{\text{Za } d = 5}$$

$$a_1 = 12 - 5$$

$$a_1 = 7$$

$$\underline{\text{Za } d = -5}$$

$$a_1 = 12 + 5$$

$$a_1 = 17$$

Dakle, postoje 2 takva niza:

7, 12, 17, 22, 27, ...

17, 12, 7, 2, -3, ...

6) Rešiti jednačinu: $3 + 7 + 11 + \dots + x = 210$

Rešenje:

Uočimo najpre da se ovde radi o zbiru prvih n članova aritmetičkog niza i da je :

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 7$$

$$a_n = x$$

$$S_n = 210$$

$$a_1 = 3$$

$$d = 4$$

$$S_n = 210$$

$$x = a_n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$210 = \frac{n}{2}[2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 4]$$

$$210 = \frac{n}{2}[6 + 4n - 4]$$

$$210 = \frac{n}{2}[4n + 2]$$

$$210 = 2n^2 + n$$

$$2n^2 + n - 210 = 0$$

Kvadratna "po n "

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm 41}{4}$$

$$n_1 = 10$$

~~$$n_2 = \frac{-42}{4}$$~~

Dakle $n = 10$

$$x = a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \cdot 4 = 3 + 36 = 39$$

$$\boxed{x = 39}$$

7) Aritmetički niz ima 20 članova. Zbir članova koji su na parnim mestima je 250, a zbir članova na neparnim mestima 220. Naći dva srednja člana.

Rešenje:

Postavimo prvo problem:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 250$$

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 220$$

Na ovaj način smo ustvari dobili 2 niza sa po 10 članova čiji su zbrojevi : za prvi 250 i za drugi 220, a kod oba dva niza je razlika $2d$.

Primenićemo formula za $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2a_2 + (10-1) \cdot 2d] \rightarrow \text{jer mu je prvi član } a_2$$

$$250 = 5[2a_2 + 18d]$$

Za prvi niz $\Rightarrow 2a_2 + 18d = 50$

$$a_2 + 9d = 25 \wedge a_2 = a_1 + d \rightarrow a_1 + d + 9d = 25$$

$$\boxed{a_1 + 10d = 25}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + (10-1) \cdot 2d]$$

Za drugi niz $\Rightarrow 220 = 5[2a_1 + 18d]$

$$2a_1 + 18d = 44$$

$$\boxed{a_1 + 9d = 22}$$

Sad pravimo sistem:

$$a_1 + 10d = 25$$

$$a_1 + 9d = 22 \cdot (-1)$$

$$a_1 + 10d = 25$$

$$-a_1 - 9d = -22$$

$$\text{Pa je } \boxed{d = 3} \Rightarrow a_1 + 30 = 25 \Rightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

Znači niz je : -5, -2, 1, 4, 7, ...

Srednji članovi su a_{10} i a_{11}

$$a_{10} = a_1 + 9d = -5 + 27 = 22$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = -5 + 30 = 25$$

8) Između brojeva -5 i 30 umetnuti aritmetički niz od šest članova. Koliki je zbir svih osam članova?

Rešenje:

U ovom zadatku ćemo iskoristiti formulu : $d = \frac{b-a}{k+1}$

$$\begin{aligned} a &= -5 \\ b &= 30 \\ k &= 6 \end{aligned} \quad d = \frac{30 - (-5)}{6+1} = \frac{35}{7} = 5$$

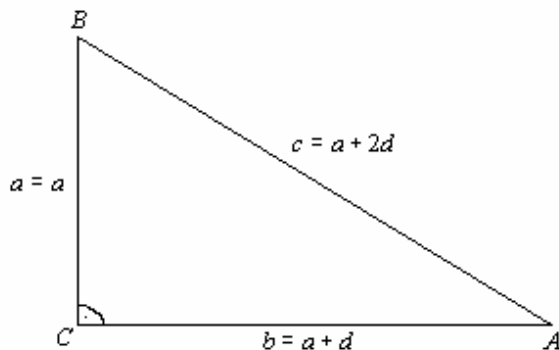
Niz je -5,0,5,10,15,20,25,30 pa je $a_1 = -5$ i $a_8 = 30$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{Dakle } S_8 = 100$$
$$S_8 = \frac{8(-5+30)}{2} = 4 \cdot 25 = 100$$

9) Stranice pravouglog trougla su uzastopni članovi aritmetičkog niza za koji je $d=3$.
Odredi dužine tih stranica.

Rešenje:

Važi pitagorina teorema: $a^2 + b^2 = c^2$



Pošto je $d = 3$

$$a = a$$

$$b = a + d = a + 3$$

$$c = a + 2d = a + 6$$

Zamenimo ovo u Pitagorinu teremu:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + (a + 3)^2 = (a + 6)^2$$

$$a^2 + a^2 + 6a + 9 = a^2 + 12a + 36$$

$$a^2 + 6a + 9 - 12a - 36 = 0$$

$$a^2 - 6a - 27 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{6 \pm 12}{2}$$

$$a_1 = 9,$$

$$~~a_2 = -3~~$$

-3 nije rešenje, jer dužina stranice ne može da bude negativan broj.

Dužine stranica su:

$$a = 9$$

$$b = a + 3 = 9 + 3 = 12$$

$$c = a + 6 = 9 + 6 = 15$$

10) Odrediti x tako da brojevi $\log 2, \log(2^x - 1), \log(2^x + 3)$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rešenje:

Upotřebićemo aritmetičku sredinu $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ tj, $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$

$$\log 2, \log(2^x - 1), \log(2^x + 3)$$

$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3$

$$\log(2^x - 1) = \frac{\log 2 + \log(2^x + 3)}{2}$$

$$2 \log(2^x - 1) = \log 2 \cdot (2^x + 3)$$

$$\log(2^x - 1)^2 = \log 2 \cdot (2^x + 3)$$

$$(2^x - 1)^2 = 2 \cdot (2^x + 3) \dots \text{smena } 2^x = t$$

$$(t - 1)^2 = 2(t + 3)$$

$$t^2 - 2t + 1 = 2t + 6$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$t_1 = 5$$

$$t_2 = -1$$

Vratimo se u smenu:

$$2^x = 5$$

ili

$$2^x = -1$$

$$\boxed{x = \log_2 5}$$

nemoguće

Neću vam više davati domaće zadatke. Potrudite se da prepisete lekciju u sveske.