

Poslednja lekcija za ovu godinu. Prepishite je u sveske. Ne morate mi slati prepisano, kao ni za prethodnu lekciju.

Geometrijski niz

Podjimo od dva primera:

Primer 1. 3, 6, 12, 24, 48 ...

Primer 2. 81, 27, 9, 3, ...

Pažljivim posmatranjem možemo zaključiti da je svaki sledeći član niza u

primeru 1. 3, 6, 12, 24, 48 ... 2 puta veći od predhodnog člana, pa će sledeći članovi biti, $48 \cdot 2 = 96$, $96 \cdot 2 = 192, \dots$

U **primeru 2.** 81, 27, 9, 3, ... primećujemo da je svaki sledeći član tri puta manji od predhodnog, pa bi sledeći članovi bili $3 : 3 = 1$, $1 : 3 = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}, \dots$

Ovakvi nizovi zovu se **geometrijski** i kao što vidimo, mogu biti rastući (primer 1.) i opadajući (primer 2.)

Dakle: Niz brojeva u kome je količnik ma koja dva uzastopna člana niza stalan zove se geometrijski niz ili progresija. Naravno i ovde je važno od kog broja počinje niz, pa se taj broj zove "prvi" član niza i obeležava se sa b_1 .

→ za primer 1. $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12, \dots$

→ za primer 2. $b_1 = 81$, $b_2 = 27$, $b_3 = 9, \dots$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q \rightarrow \text{količnik niza}$$

→ za primer 1. $q = 2$ (rastući niz)

→ za primer 2. $q = \frac{1}{3}$ (opadajući niz)

Ako znamo b_1 (prvi član niza) i q (količnik niza) niz je potpuno određen, odnosno možemo da ga zapišemo.

Bilo koji član niza (n -ti član) se traži po formuli :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Zbir prvih n -članova niza se traži

i) $q > 1$

ii) $q < 1$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Za svaki član niza važi: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ → geometrijska sredina

Ako između brojeva a i b treba umetnuti (interpolirati) k brojeva tako da zajedno sa a i b čine geometrijski niz, onda količnik q tog niza tražimo po formuli :

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

Zadaci:

1)

Odrediti geometrijsku progresiju kod koje je $b_1 + b_3 = 15 \wedge b_2 + b_4 = 30$

Rešenje:

$$b_1 + b_3 = 15$$

$$b_2 + b_4 = 30$$

Iskoristimo formulu : $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, po njoj je:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$

Zamenimo ovo u postavljenu sistem:

$$b_1 + b_1 q^2 = 15$$

$$b_1 q + b_1 q^3 = 30 \rightarrow \text{Izvučemo "zajednički" iz obe jednačine:}$$

$$\hline b_1(1 + q^2) = 15$$

$$b_1 q(1 + q^2) = 30 \rightarrow \text{Ovde je "trik" da se jednačine podele.}$$

$$\hline \frac{\cancel{b_1} (1+q^2)}{\cancel{b_1} q (1+q^2)} = \frac{15}{30} \rightarrow \text{Skratimo šta može !}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 2$$

Vratimo se u jednu od jednačina: (naravno biramo lakšu).

$$b_1(1 + q^2) = 15$$

$$b_1(1 + 4) = 15 \Rightarrow b_1 = 3$$

Traženi niz je : 3,6,12,24,48,...

2) Izračunati deseti član geometrijskog niza 1,3,9,27...

Rešenje:

1, 3, 9, 27, ... Iz tog niza zaključujemo da je: $b_1 = 1$ i $q = 3$
↓ ↓ ↓ ↓
 b_1 b_2 b_3 b_4

Pošto se bilo koji član niza računa po formuli $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ to će deseti član biti :

$$b_{10} = b_1 \cdot q^{10-1}$$

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9$$

$$b_{10} = 1 \cdot 3^9$$

$$b_{10} = 3^9$$

$$b_{10} = 19683$$

3) U geometrijskom nizu je : $b_6 - b_4 = 216 \wedge b_3 - b_1 = 8 \wedge S_n = 40$

Izračunati b_1, q i n

Rešenje:

$$b_6 - b_4 = 216$$

$$b_3 - b_1 = 8$$

$$S_n = 40$$

$$b_6 = b_1 \cdot q^5 \quad \text{Zamenimo u prve dve jednačine!}$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 \cdot q^5 - b_1 \cdot q^3 = 216 \\ b_1 q^2 - b_1 = 8 \end{array} \right\} \text{izvučemo zajednički}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 q^3 (q^2 - 1) = 216 \\ b_1 (q^2 - 1) = 8 \end{array} \right\} \text{podelimo ih}$$

$$\frac{\cancel{b_1} q^3 (q^2 - 1)}{\cancel{b_1} (q^2 - 1)} = \frac{216}{8}$$

$$q^3 = 27 \Rightarrow q^3 = 3^3 \Rightarrow \boxed{q = 3}$$

$$b_1 (q^2 - 1) = 8$$

$$b_1 (3^2 - 1) = 8 \Rightarrow b_1 \cdot 8 = 8 \Rightarrow \boxed{b_1 = 1}$$

$$\frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = 40$$

$$\frac{3^n - 1}{2} = 40$$

Pošto je $q = 3 > 1$ koristimo formulu $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 3^n - 1 = 80$

$$3^n = 81$$

$$3^n = 3^4 \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

4) Tri broja, čiji je zbir 26, obrazuju geometrijski niz. Ako se im brojevima doda redom 1, 6 i 3, dobijaju se tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Odrediti te brojeve.

Rešenje:

Neka su tri broja : b_1, b_2 i b_3 i važi : $b_1 + b_2 + b_3 = 26$ a kako je $b_2 = b_1q \wedge b_3 = b_1q^2$

to će biti $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 26$ tj. $\boxed{b_1(1 + q + q^2) = 26}$

Ako im dodamo redom 1, 6 i 3 dobićemo aritmetički niz:

$$a_1 = b_1 + 1$$

$$a_2 = b_2 + 6 = b_1q + 6$$

$$a_3 = b_3 + 3 = b_1q^2 + 3$$

Pošto oni čine aritmetičku progresiju, mora biti : $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ tj. $a_1 + a_3 = 2a_2$

$$\underbrace{(b_1 + 1)}_{a_1} + \underbrace{(b_1q^2 + 3)}_{a_3} = 2 \underbrace{(b_1q + 6)}_{a_2} \rightarrow \text{"sredimo"}$$

$$b_1 + 1 + b_1q^2 + 3 = 2b_1q + 12$$

$$b_1q^2 - 2b_1q + b_1 = 12 - 1 - 3$$

$$\boxed{b_1(q^2 - 2q + 1) = 8}$$

Napravimo sada sistem od ove dve uokvirene jednakosti:

$$\left. \begin{array}{l} b_1(q^2 + q + 1) = 26 \\ b_1(q^2 - 2q + 1) = 8 \end{array} \right\} \text{podelimo ih}$$

$$\frac{q^2 + q + 1}{q^2 - 2q + 1} = \frac{26}{8}$$

$$26(q^2 - 2q + 1) = 8(q^2 + q + 1) / : 2$$

$$13(q^2 - 2q + 1) = 4(q^2 + q + 1)$$

$$13q^2 - 26q + 13 = 4q^2 + 4q + 4$$

$$9q^2 - 30q + 9 = 0$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0 \rightarrow \text{kvadratna "po q"}$$

$$q_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{3 \cdot 2} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$q_1 = 3 \wedge q_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Za } q = 3$$

$$b_1 = \frac{26}{q^2 + q + 1} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\text{Za } q = \frac{1}{3}$$

$$b_1 = \frac{26}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} = \frac{26}{\frac{13}{9}} = 18$$

Rešenja

2,6,18 \rightarrow Geometrijski niz

3,12,21 \rightarrow Aritm. Niz

Rešenja

18,6,2 \rightarrow Geometrijski niz

19,12,5 \rightarrow Aritm. Niz

5) Izračunati zbir n brojeva oblika 1, 11, 111, 1111...

Rešenje:

1, 11, 111, 1111, ...

Trik je napisati brojeve drugačije:

$$1 = \frac{10-1}{9}$$

$$11 = \frac{100-1}{9} = \frac{10^2-1}{9}$$

$$111 = \frac{1000-1}{9} = \frac{10^3-1}{9}$$

.....itd.

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \dots =$$

$$= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9}$$

$$= \frac{1}{9} [10-1 + 10^2-1 + 10^3-1 + \dots + 10^n-1] \quad \text{Pazi: ima } n \text{ jedinica...}$$

$$= \frac{1}{9} [10 + 10^2 + \dots + 10^n - n] \quad \text{ovde je } 10 + 10^2 + \dots + 10^n \rightarrow \text{geometrijski niz}$$

Geometrijski niz $\rightarrow b_1 = 10 \wedge q = 10$

$$S = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} \quad \text{ovo je za geometrijski niz, pa je :}$$

$$S_n = \frac{1}{9} \left[\frac{10 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1} - n \right]$$

$$S_n = \frac{1}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right] = \boxed{\frac{1}{81} [10(10^n - 1) - 9n]}$$

6) Izračunati zbir n brojeva oblika $\frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{23}{24}, \frac{47}{48}, \dots$

Rešenje:

Sličan trik kao malopre!

$$\frac{5}{6} = \frac{6-1}{6} = 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{12} = \frac{12-1}{12} = 1 - \frac{1}{12}$$

$$\frac{23}{24} = \frac{24-1}{24} = 1 - \frac{1}{24}$$

.....itd.

$$S_n = \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{23}{24} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{12} + 1 - \frac{1}{24} + \dots$$

$$= n - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots \right)$$

geometrijski niz

$$b_1 = \frac{1}{6} \quad q = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S = \frac{\frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$$

Dakle :

$$S_n = n - \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$$

$$\boxed{S_n = n - \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right]}$$

7) Ako su a, b, c k -ti, n -ti i p -ti članovi jedne geometrijske progresije tada je $a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} = 1$. Dokazati.

Rešenje:

Koristićemo formulu $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Pošto je a k -ti član $\Rightarrow a = b_1 \cdot q^{k-1}$

Pošto je b n -ti član $\Rightarrow b = b_1 \cdot q^{n-1}$

Pošto je c p -ti član $\Rightarrow c = b_1 \cdot q^{p-1}$

$$\begin{aligned} a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} &= [b_1 q^{k-1}]^{n-p} \cdot [b_1 \cdot q^{n-1}]^{p-k} \cdot [b_1 \cdot q^{p-1}]^{k-n} = \\ &= b_1^{n-p} \cdot q^{(k-1)(n-p)} \cdot b_1^{p-k} \cdot q^{(n-1)(p-k)} \cdot b_1^{k-n} \cdot q^{(p-1)(k-n)} \end{aligned}$$

Izračunajmo posebno "izložilac" za b_1 :

$$n - p + p - k + k - n = 0$$

Sada ćemo izračunati "izložilac" za q :

$$\begin{aligned} (k-1)(n-p) + (n-1)(p-k) + (p-1)(k-n) &= \\ kn - kp - n + p + np - kn - p + k + pk - pn - k + n &= 0 \end{aligned}$$

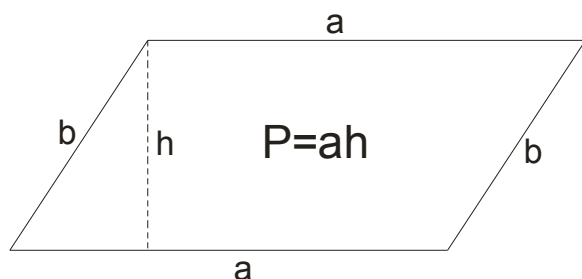
Kao što primećujete sve se potire!

$$\text{Pa je : } a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} = b_1^0 \cdot q^0 = 1$$

Kraj dokaza.

8) Odrediti paralelogram tako da merni brojevi osnovice, visine i površine čine geometrijski niz.

Rešenje:



$a, h, P \rightarrow$ čine geometrijski niz

$\boxed{P = a \cdot h}$ \rightarrow formula za površinu

A pošto a, h, P čine geometrijski niz, to mora biti:

$$h = \sqrt{aP} \Rightarrow h^2 = aP \Rightarrow \boxed{P = \frac{h^2}{a}}$$

Uporedimo ove dve uokvirene formule za površinu:

$$ah = \frac{h^2}{a} \Rightarrow h = a^2 \Rightarrow P = a \cdot a^2 = a^3$$

Dakle: $a = a, h = a^2$ i $P = a^3$

Beskonačni red

Neka je dat beskonačni niz realnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Izraz oblika $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zove se **beskonačni red**.

Geometrijskom nizu $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$ odgovara red:

$$a(1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots) = a \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Zbir (suma) beskonačno opadajućeg reda (geometrijskog) je $S = \frac{a}{1-q}$ za $|q| < 1$

Zadaci:

1) Decimalni broj 0,777777... prebaciti u razlomak

Rešenje:

$$\begin{aligned} 0,7777\dots &= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots \\ &= \frac{7}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) \\ &= \frac{7}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

Ovde imamo geometrijski red, $a = \frac{7}{10}, q = \frac{1}{10}$

$$\text{Njegova suma je } S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$$

2) Izračunati vrednost mešovito periodičnog razlomka 0,3444....

Rešenje:

$$\begin{aligned}0,3444\dots &= \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{4}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right)\end{aligned}$$

Pazi: $\frac{4}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right)$ je **geometrijski red** : $a = \frac{4}{100}, q = \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned}&= \frac{3}{10} + \frac{\frac{4}{100}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{4}{90} = \boxed{\frac{31}{90}}\end{aligned}$$

3) Nadji red ako je $S = \frac{3}{3-x}$

Rešenje:

Mi znamo da je formula : $S = \frac{a}{1-q}$

Znači gde je $3-x$ treba da je $1-q$. Izvršićemo "sredjivanje" izraza :

$$S = \frac{3}{3-x} = \frac{3}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \Rightarrow a=1, q = \frac{x}{3}$$

Pa će traženi red biti:

$$\begin{aligned}a(1+q+q^2+q^3+\dots) &= \\ 1 \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots\right) &= 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots\end{aligned}$$

4) **Najdi red ako je** $S = \frac{6}{3-2x}$

Rešenje:

$$S = \frac{6}{3-2x} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3}(1-\frac{2x}{3})} = \frac{2}{1-\frac{2x}{3}} \Rightarrow a = 2, q = \frac{2x}{3}$$

Pa će red biti :

$$\begin{aligned} a(1+q+q^2+q^3+\dots) &= \\ 2(1+\frac{2x}{3}+(\frac{2x}{3})^2+(\frac{2x}{3})^3+\dots) &= \\ 2+\frac{4x}{3}+\frac{8x^2}{9}+\frac{16x^3}{27}+\dots & \end{aligned}$$

5) **Sledeći periodični razlomak pretvoriti u običan razlomak** 2,717171....

Rešenje:

$$2,717171\dots = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

Ovde ćemo uočiti 2 geometrijska reda:

$$S_1 = \frac{7}{10} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{100000} + \dots = \frac{7}{10}(1 + \frac{1}{100} + \dots)$$

$$S_2 = \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \dots = \frac{1}{100}(1 + \frac{1}{100} + \dots)$$

$$\text{Zbir prvog reda je } S_1 = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{99}{100}} = \frac{70}{99}$$

$$\text{Zbir drugog reda je } S_2 = \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{1}{99}$$

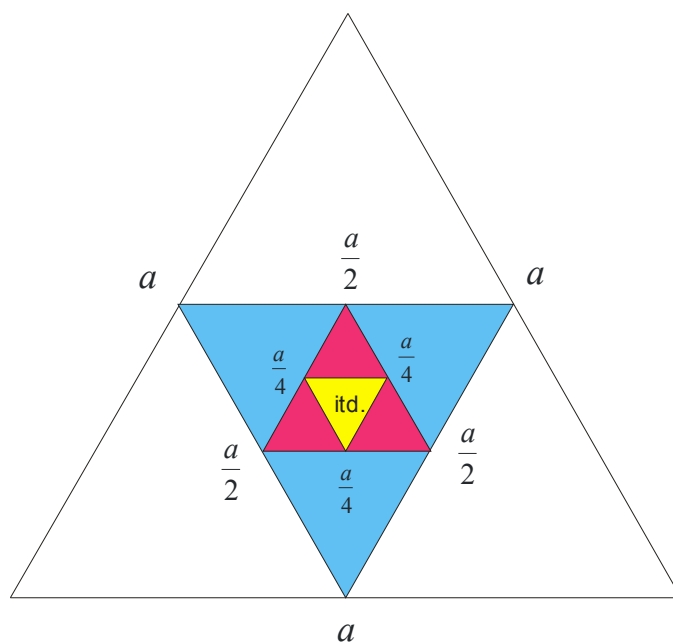
Vratimo se "na zadatak":

$$2,717171\dots = 2 + \frac{70}{99} + \frac{1}{99} = \frac{269}{99}$$

$$\boxed{S = \frac{269}{99}}$$

6) U jednakostraničnom trouglu stranice a upisan je novi jednakostranični trougao spajanjem sredinama datog trougla. U dobijenom trouglu je upisan drugi trougao na isti način, itd. Odrediti zbir obima svih trouglova.

Rešenje:



Stranica 1. trougla je a

Stranica 2. trougla je $\frac{a}{2}$

Stranica 3. trougla je $\frac{a}{4}$

Stranica 4. trougla je $\frac{a}{8}$

..... itd.

Njihovi obimi će biti : $O = 3 \cdot a$

Znači:

$$O_1 = 3a$$

$$O_2 = 3 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$O_3 = 3 \cdot \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$$

$$O_4 = 3 \cdot \frac{a}{8} = \frac{3a}{8}$$

.....*itd.*

A njihov zbir je :

$$\begin{aligned} O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + \dots &= \\ &= 3a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + \dots \\ &= 3a \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \\ &= 3a \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ovde je } A=3a \text{ i } q=\frac{1}{2}$$

$$\text{po formuli : } S = \frac{A}{1-q}$$

$$= \frac{3a}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3a}{\frac{1}{2}} = 6a$$

Znači zbir obima je 6a.